

# TINJAUAN ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA PADA MATA KULIAH ALJABAR LINEAR BERDASARKAN MODEL TAHAPAN KASTOLAN

**Robert Harry Soesanto**  
Universitas Pelita Harapan  
pos-el : robert.soesanto@uph.edu

## ABSTRAK

Penelitian yang menyoroti ruang lingkup pembelajaran matematika hingga kini masih menjadi bahan diskusi yang kontinu. Berbagai temuan yang dihasilkan berpotensi menjadi diskusi bagi penelitian lanjutan. Pada pembelajaran matematika, masih ditemukan masalah berupa kesalahan matematis yang dilakukan peserta didik dalam menyelesaikan soal. Penelitian kualitatif deskriptif ini bertujuan untuk meninjau kesalahan matematis yang dilakukan mahasiswa pada mata kuliah Aljabar Linear. Model analisis kesalahan menggunakan tahapan Kastolan yang berfokus pada 3 jenis kesalahan yaitu kesalahan konseptual, prosedural, dan teknis. Sebanyak 30 mahasiswa program studi Pendidikan Matematika dari Universitas Pelita Harapan diberikan soal untuk dianalisis kesalahannya. Analisis data dilakukan dengan menggunakan teknik Miles dan Huberman yang meliputi pengumpulan data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan. Hasil penelitian memperlihatkan bahwa sebanyak 50% mahasiswa mengalami kesalahan konseptual, 20% mahasiswa mengalami kesalahan prosedural, 3.33% mahasiswa mengalami kesalahan teknik, dan 26.67% mahasiswa tidak mengalami kesalahan. Temuan ini memberikan kesempatan bagi peneliti untuk menganalisis pembelajaran matematika lain dengan tahapan Kastolan maupun mendorong peneliti untuk mengembangkan model pembelajaran guna meminimalisir kesalahan matematis yang dilakukan mahasiswa.

**Kata kunci : pembelajaran matematika, analisis kesalahan, mahasiswa universitas, tahapan Kastolan**

## ABSTRACT

*Studies that highlight the scope of mathematics learning still become continuous discussion topics. Numerous findings have the potential to be a discussion for further research. In mathematics learning, there are many problems in the form of mathematical errors made by learners in solving problems. This descriptive qualitative research aims to review mathematical errors made by students in Linear Algebra courses. Error analysis model using Kastolan stages that focus on 3 types of errors namely conceptual, procedural, and technical errors. A total of 30 students of Mathematics Education study program from Pelita Harapan University were given question to analyze their mistakes. Data analysis was performed using Miles and Huberman technique which included data collection, data presentation, and conclusion. The results showed that as many as 50% of students underwent conceptual errors, 20% of students underwent procedural errors, 3.33% of students underwent technical errors, and 26.67% of students underwent no errors. These findings provide an opportunity for researchers to analyze other mathematical learning with Kastolan stages as well as encourage researchers to develop learning models to minimize mathematical errors made by students.*

**Keywords : mathematics learning, error analysis, university students, Kastolan stages**

## 1. PENDAHULUAN

Kajian mengenai penelitian pembelajaran matematika telah mendapat banyak sorotan serta pembahasan dari berbagai peneliti, mulai dari ranah pendidikan dasar (Sutresna, 2015; Yuniarti, 2016), pendidikan menengah (Karim dan Normaya, 2015; Yanti et al., 2019), hingga tingkat perguruan tinggi (Afrila dan Yarmayani, 2018). Selain itu, berbagai topik dari dimensi peserta didik juga telah mendapat perhatian dari banyak peneliti untuk meninjau dan menganalisis secara mendalam. Pada dimensi kognitif, salah satu studi dilakukan oleh Karim dan Normaya (2015) secara deskriptif memberikan perhatian terhadap kemampuan berpikir kritis siswa dengan menerapkan model Jucama (pengajuan dan pemecahan masalah) pada topik pembelajaran garis dan sudut. Studi tersebut memberikan hasil yang positif terhadap keseluruhan capaian indikator dari kemampuan berpikir kritis siswa. Pada dimensi mental dan afektif siswa, salah satu sorotan yang masih relevan untuk terus dikaji adalah mengenai kecemasan matematis (Prahmana et al., 2019; Rawa dan Yasa, 2019). Selama kurang lebih 6 dekade, telah banyak peneliti yang terus memikirkan cara optimal dalam mengatasi kecemasan matematis dengan pertimbangan berbagai konteks dalam diri siswa (Dowker et al., 2016). Penelitian yang dilakukan oleh Luttenberger et al. (2018) mengungkapkan beberapa anteseden berkaitan dengan kecemasan matematis seperti faktor lingkungan, budaya, maupun stereotip gender yang membuka kesempatan dan rekomendasi untuk dilakukan penelitian lanjutan guna mereduksi kecemasan di dalam

pembelajaran matematika, sehingga hal tersebut akan memberikan prestasi dan performa matematis yang optimal.

Melalui pemaparan tersebut, dapat dinyatakan bahwa pembelajaran matematika merupakan elemen penting di dalam kehidupan manusia. Sedemikian pentingnya hingga menjadi perhatian bagi para peneliti untuk terus berkontribusi dalam optimalisasi terhadap keefektifan pembelajaran matematika yang bermakna bagi peserta didik. Ilmu matematika merupakan ilmu yang bersifat abstrak (Sa'o et al., 2019) namun juga penting dikarenakan manfaat yang erat bagi kehidupan manusia (Soesanto & Dirgantoro, 2021). Sedemikian eratnya hingga setiap sisi kehidupan manusia dan ilmu pengetahuan lain yang ditekuni, tidak lepas dari matematika. Fakta tersebut memberikan pengertian bahwa matematika dipandang sebagai suatu ilmu yang pantas untuk dipelajari hingga jenjang yang lebih tinggi.

Berbicara tentang matematika, terdapat dua pengetahuan yang dibutuhkan oleh peserta didik untuk mencapai pembelajaran matematika yang maksimal, yaitu pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural. Hiebert dan Wearne (Hamdani, 2016) menyatakan bahwa pengetahuan konseptual berkaitan dengan kemampuan peserta didik dalam menghubungkan potongan informasi berupa fakta, konsep, maupun prinsip matematika yang dapat dipandang sebagai suatu jaringan pengetahuan yang saling terkait. Sementara itu, pengetahuan prosedural menitikberatkan kepada pengetahuan mengenai kaidah urutan proses atau algoritma langkah kerja yang dilakukan ketika

menghadapi permasalahan matematis (Ramalisa dan Syafmen, 2014; Sari et al., 2020). Kedua pengetahuan ini sangat diperlukan dalam mendukung pembelajaran matematika yang bermakna.

Namun, permasalahan yang umum terjadi di kalangan peserta didik adalah masih terbiasanya pemberian soal rutin yang hanya mengasah pengetahuan prosedural saja (Thamsir et al., 2019), sehingga terkesan bahwa pengetahuan konseptual merupakan unsur yang lebih esensi daripada prosedural. Hal ini secara kontras dinyatakan oleh Sari et al. (2020) bahwa peserta didik mampu memiliki intuisi yang tepat mengenai suatu konsep namun tidak mampu menyelesaikan permasalahan matematis apabila hanya memiliki pengetahuan konseptual tanpa disertai dengan kecukupan pengetahuan prosedural. Berpijak dari hal tersebut, dapat dikatakan bahwa kedua jenis pengetahuan matematis tersebut memberikan keterkaitan satu sama lain di dalam pembelajaran matematika.

Ketidakseimbangan antara pengetahuan matematis tersebut memicu terjadinya kesalahan peserta didik dalam mencari penyelesaian atas permasalahan matematis yang diberikan. Kesalahan matematis tersebut bukan hanya terjadi di kalangan siswa pada jenjang sekolah, namun juga dialami oleh mahasiswa sebagai pembelajar pada jenjang universitas. Walaupun mahasiswa dipandang sebagai master dalam proses pembelajarannya sendiri (Zimmerman, 2015), namun bukan berarti bahwa mahasiswa tidak melakukan kesalahan sebagai akibat dari pengetahuan awal matematis yang kurang memadai maupun tidak seimbangny pengetahuan

konseptual dan prosedural yang diterima pada jenjang sekolah sebelumnya (Dirgantoro et al., 2019).

Berkaitan dengan analisis kesalahan, salah satu analisis yang umum digunakan adalah model Newman, di mana model tersebut menganalisis kesalahan siswa dalam hal: (1) kesalahan membaca soal, (2) kesalahan memahami soal, (3) kesalahan transformasi, (4) kesalahan ketrampilan proses, dan (5) kesalahan penulisan jawaban akhir (Sudiono, 2017; Dirgantoro et al., 2019; Murtiyasa dan Wulandari, 2020). Model Newman ini telah umum digunakan untuk mengetahui jenis kesalahan mana yang lebih dominan yang dialami oleh siswa pada konteks pembelajaran matematika di sekolah maupun mahasiswa pada konteks universitas. Penelitian ini hendak menggunakan sebuah model analisis lain untuk mengetahui jenis kesalahan dalam pengerjaan masalah matematis, yaitu model Kastolan.

Model tahapan Kastolan melihat kesalahan matematis peserta didik berdasarkan tiga hal yaitu kesalahan konseptual, kesalahan prosedural, dan kesalahan teknik (Ayuningsih et al., 2020; Raharti dan Yuniarta, 2020). Adapun ketiga jenis kesalahan tersebut terletak pada titik berat yang dimiliki. Kesalahan konseptual berfokus pada kesalahan penafsiran istilah, konsep, ataupun prinsip dari sebuah permasalahan, sedangkan kesalahan prosedural berfokus pada kesalahan penyusunan langkah-langkah sistematis ketika menyelesaikan suatu masalah. Sementara itu, kesalahan teknik berfokus pada kesalahan dalam perhitungan, operasi matematika yang dilakukan, ataupun penulisan simbol

matematika (Farida, 2015; Tias dan Wutsqa, 2015). Model Kastolan ini akan diterapkan untuk melihat ketiga kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa pada mata kuliah Aljabar Linear.

Aljabar Linear merupakan mata kuliah yang didapatkan oleh mahasiswa semester 3 program studi Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Pendidikan yang bertempat di Universitas Pelita Harapan, Tangerang. Mata kuliah ini secara umum mencakup tentang topik persamaan linear, operasi baris elementer, matriks beserta unsur-unsurnya, dan perluasan dalam menentukan basis ruang di dalamnya (Howard & Rorres, 2014). Pada studi sebelumnya, telah dilakukan analisis kesalahan terkait dengan mata kuliah Aljabar Linear tersebut, seperti studi yang dilakukan oleh Patricia (2019) melihat kesalahan mahasiswa terhadap penyelesaian persamaan kuadrat sehubungan dengan penggunaan operasi baris elementer (OBE). Studi lain yang dilakukan oleh Nawafilah (2019) meninjau kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal persamaan linear yang juga menggunakan OBE. Melihat kesamaan dari kedua studi tersebut, peneliti ingin menganalisis kesalahan mahasiswa bukan berkaitan dengan persamaan, tetapi pada topik matriks. Peneliti akan melihat jenis kesalahan matematis mana yang secara dominan dialami oleh mahasiswa terhadap pengerjaan soal matriks pada Aljabar Linear, sehingga diharapkan kontribusi dari penelitian ini dapat memberikan kesempatan kepada peneliti lain untuk menerapkan suatu model atau metode pembelajaran guna mereduksi tingkat

kesalahan matematis, ditinjau oleh tahapan Kastolan.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif deskriptif dengan mengambil subjek menggunakan *purposive sampling* yaitu sebanyak 30 mahasiswa calon guru matematika Universitas Pelita Harapan angkatan 2019, dikarenakan mereka berada di semester 3 yang menjalani mata kuliah Aljabar Linear. Mahasiswa tersebut diberikan satu soal mengenai topik matriks berkaitan dengan determinan dan sifat matriks. Durasi pengerjaan soal dilaksanakan selama 10 menit. Soal yang diberikan berasal dari buku elektronik berjudul *Elementary Linear Algebra* karangan Howard Anton dan Chris Rorres serta telah melewati diskusi dan persetujuan dengan tim dosen pengampu Aljabar Linear. Adapun soal yang diberikan adalah:

Diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa matriks A dan B saling komutatif jika dan hanya jika:

$$\begin{vmatrix} b & a - c \\ e & d - f \end{vmatrix} = 0$$

Kemudian, seluruh hasil kerja mahasiswa dikumpulkan, diperiksa, dan dianalisis kesalahannya berdasarkan model tahapan Kastolan yang mencakup jenis kesalahan konseptual, prosedural, dan teknik. Analisis data dilakukan dengan menggunakan teknik Miles dan Huberman yang meliputi pengumpulan data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan (Sugiyono, 2013). Temuan berupa persentase dari pengelompokkan

jenis kesalahan yang dihasilkan melalui analisis Kastolan akan disajikan dalam bentuk tabel serta ditinjau lebih lanjut berdasarkan teori serta penelitian terkait, sehingga dapat dilihat kesinambungannya secara komprehensif.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum temuan dalam penelitian ini disajikan, terlebih dahulu diberikan penyelesaian dari soal yang diberikan oleh mahasiswa. Jika dilihat dari maksud soal, mahasiswa diarahkan untuk menganalisis pembuktian berdasarkan konsep mengenai sifat dan determinan matriks ke dalam penyelesaian masalah. Pada soal tersebut, terdapat kata kunci mengenai pembuktian salah satu sifat matriks, yaitu sifat komutatif (*matrix commutative properties*). Ini menunjukkan bahwa analisis yang dilakukan bukanlah merujuk kepada sifat komutatif dalam penjumlahan matriks, tetapi perkalian matriks. Hal ini dikarenakan setiap matriks dengan ordo sama lalu dilakukan penjumlahan, maka hasilnya pasti komutatif, atau dapat direpresentasikan sebagai  $A + B = B + A$ .

Namun, tidak demikian halnya dengan perkalian matriks. Matriks  $AB$  belum tentu memiliki elemen yang sama dengan matriks  $BA$ , sehingga mahasiswa perlu melihat kepada petunjuk lainnya, yaitu syarat  $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$  sebagai analisis kondisi yang dimaksud soal. Penyelesaiannya adalah, kita dapat melihat bahwa:

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{bmatrix}$$

$$\text{di lain pihak } BA = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & bd + ce \\ 0 & cf \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil perkalian kedua matriks, dapat dilihat bahwa terdapat satu elemen yang memiliki nilai berbeda, yaitu elemen yang terletak pada baris pertama dan kolom kedua. Pada matriks  $AB$ , elemen tersebut bernilai  $ae + bf$ , sedangkan pada matriks  $BA$  elemen tersebut bernilai  $bd + ce$ . Tentunya, mahasiswa tidak bisa langsung menyimpulkan bahwa matriks tidak saling komutatif, karena belum menganalisis dari persyaratan determinan yang diberikan oleh soal. Jika mengandaikan bahwa kedua matriks saling komutatif, maka itu berarti bahwa  $ae + bf = bd + ce$ . Selanjutnya, perhatikan bahwa  $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$ , di mana hal tersebut berarti  $b(d-f) - e(a-c) = 0$ . Jika proses dilanjutkan, akan menjadi  $bd - bf - ae + ce = 0$  dan melalui pemindahan ruas, dapat dilihat bahwa  $bd + ce = ae + bf$  atau  $ae + bf = bd + ce$ .

Kondisi tersebut membuktikan bahwa  $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$  memberikan hasil berupa  $ae + bf = bd + ce$ , di mana fakta tersebut dapat memberikan kesimpulan bahwa elemen pada baris pertama dan kolom kedua dari  $AB$  dan  $BA$  merupakan elemen bernilai sama. Dengan demikian, terbukti bahwa kedua matriks saling komutatif oleh persyaratan  $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$ .

Berdasarkan penyelesaian tersebut, peneliti kemudian memeriksa dan menghimpun kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa ke dalam kelompok jenis kesalahan yang serupa. Hasil dari

pengelompokkan tersebut disajikan pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Persentase Jenis Kesalahan Mahasiswa

Jenis Kesalahan	Jumlah Mahasiswa	Persentase
Kesalahan konseptual	15	50%
Kesalahan prosedural	6	20%
Kesalahan teknik	1	3.33%
Tidak ada kesalahan	8	26.67%
Total	30	100%

Hasil yang disajikan pada Tabel 1 memperlihatkan bahwa hanya 8 orang mahasiswa saja yang mampu menyelesaikan soal dengan tepat sesuai dengan konsep yang telah dipelajari. Hal ini masih terbilang cukup memprihatinkan bahwasanya mahasiswa seharusnya mampu menguasai pengetahuan yang telah dipelajari (Zimmerman, 2015). Namun, ada hal yang positif dari perolehan hasil tersebut, yaitu hanya ditemukan 1 orang mahasiswa saja yang mengalami kesalahan teknik. Temuan ini mengindikasikan bahwa mahasiswa secara keseluruhan sudah mampu menempatkan teknik dan operasi matematika secara tepat. Lebih lanjut, temuan terkait ketiga jenis kesalahan matematis akan dijabarkan secara detail pada bagian terpisah.

### Kesalahan Konseptual

Berdasarkan hasil pada Tabel 1, terdapat 15 mahasiswa (50%) yang mengalami kesalahan konseptual, di mana mahasiswa tidak mampu

menafsirkan soal maupun istilah, konsep, atau prinsip yang terkandung di dalamnya. Pada Gambar 1, terlihat contoh kesalahan konseptual yang dilakukan oleh mahasiswa yaitu salah menafsirkan konsep determinan. Mahasiswa tersebut mencari determinan dari masing-masing matriks, lalu menggunakannya untuk membuktikan kebenaran soal. Selain itu, terlihat juga mahasiswa yang pada akhirnya kebingungan dengan pencarian matriks yang dilakukan dan terkesan memaksakan agar soal tersebut seolah-olah terbukti. Perlakuan tersebut ditunjukkan dengan adanya kecenderungan untuk mengkondisikan pembuktian yang berakibat pada ketidaktelitian operasi matematika. Jenis kesalahan ini dilakukan oleh 2 mahasiswa dari 15 mahasiswa (13.33%) yang melakukan kesalahan konseptual, tentunya dengan pengerjaan yang serupa namun tidak sama persis.

Dik:  $A = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix}$  dan  $B = \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix}$   
 Jika dan hanya jika  $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$   
 $|A| = ac$   
 $|B| = df$   
 $|C| = (bd-bf) - (ea-ec) = 0$   
 $= b(df) = e(ac)$   
 Mis  $b = |B|$  dan  $e = |A|$   
 maka  $|A| \cdot ac = |B| \cdot df$

Gambar 1. Kesalahan Konseptual Mahasiswa (Kesalahan Penafsiran Konsep Determinan)

Selain itu, terdapat juga jenis kesalahan konseptual mahasiswa yang lain berkaitan dengan penyelesaian soal ini. Kesalahan tersebut berupa kekeliruan dalam menafsirkan soal, di mana seharusnya pembuktian sifat

komutatif berkaitan dengan perkalian matriks tetapi justru mahasiswa membuktikan penjumlahan matriks, yang berakibat pada pengabaian syarat dari  $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$ . Salah satu contoh kesalahan konseptual tersebut disajikan pada Gambar 2 sebagai berikut:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$   
 $\det(A) = ac$      $\det(B) = df$      $b$   
 $A + B = B + A$   
 $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+a & e+b \\ 0 & f+c \end{bmatrix}$   
 $(a+d)(c+f) - 0 = (d+a)(f+c) - 0$   
 $ac + af + dc + df = df + dc + af + ac$   
 $ac + af + dc + df = ac + af + dc + df$

Gambar 2. Kesalahan Konseptual Mahasiswa  
(Kesalahan Penafsiran Soal)

Tipe kesalahan konseptual ini lebih banyak dilakukan oleh mahasiswa, yaitu sebanyak 11 dari 15 mahasiswa (73.33%). Berdasarkan Gambar 2, mahasiswa dengan jenis kesalahan konseptual tersebut mencoba untuk membuktikan sifat komutatif dari dua matriks yang dijumlahkan. Melalui proses pengerjaan demikian, didapatkan bahwa semua elemen seletak dari  $A + B$  sama dengan  $B + A$ . Setelah itu, mahasiswa mulai mengarahkan ke konsep determinan dengan menjadikan kedua matriks tersebut sebagai determinan. Hal ini jelas merupakan kesalahan konsep dan tidak menyelesaikan masalah sesuai dengan petunjuk dan prinsip yang diberikan.

Kecakapan matematis dapat dilihat dari 5 komponen, di mana salah satunya adalah pemahaman konseptual (Kilpatrick et al., 2001). Pemahaman konseptual ini merupakan kemampuan

di mana peserta didik mampu menunjukkan keterkaitan antar konsep dan pengaplikasiannya dalam penyelesaian soal matematika (Afifah et al., 2020). Dengan kata lain, peserta didik yang memiliki kecakapan konseptual secara memadai, akan mampu mengetahui syarat suatu konsep serta mengaplikasikannya ke dalam pemecahan masalah matematis. Berdasarkan temuan yang dihasilkan, terlihat bahwa 50% mahasiswa belum mampu mengaplikasikan konsep matriks yang dipelajari pada Aljabar Linear dengan maksimal. Ketidakmampuan secara konseptual ini menyebabkan mahasiswa menjadi tidak optimal dalam mengaitkan konsep mengenai sifat serta determinan matriks secara tepat.

### Kesalahan Prosedural

Kesalahan prosedural menitik-beratkan pada kesalahan penyusunan langkah-langkah sistematis ketika menyelesaikan suatu masalah. Berdasarkan data pada Tabel 1, terdapat 6 mahasiswa yang melakukan kesalahan prosedural. Salah satu contoh dari kesalahan prosedural ditunjukkan pada hasil pengerjaan mahasiswa yang ditampilkan pada Gambar 3 berikut.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$   
 Tentukan hasil operasi dan sifat komutatif (AB = BA) !!  
 $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{bmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} da & de + fc \\ 0 & fc \end{bmatrix}$   
 $ad = da$      $ae + bf = de + fc$      $cf = fc$   
 $ad = da$      $ae + bf = de + fc$      $cf = fc$   
 $ad = da$      $ae + bf = de + fc$      $cf = fc$   
 $ad = da$      $ae + bf = de + fc$      $cf = fc$   
 Maka, terbukti bahwa  $AB = BA$

Gambar 3. Kesalahan Prosedural Mahasiswa  
(Kesalahan dalam Menghubungkan Petunjuk Soal)

Berdasarkan Gambar 3, terlihat bahwa mahasiswa telah mengetahui

keterkaitan konsep dengan maksud soal. Mahasiswa tersebut mampu mengkoneksikan petunjuk berupa determinan  $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$  untuk membuktikan sifat komutatif pada perkalian matriks. Namun pada langkah terakhir, mahasiswa mengalami kegagalan dalam menyelesaikan soal secara tepat. Mahasiswa menjadikan kedua matriks  $AB$  dan  $BA$  sebagai determinan, dan menghubungkan petunjuk berupa  $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$  ke dalam determinan hasil perkalian dua matriks. Secara sepintas, dapat dilihat bahwa cara tersebut memberikan kesimpulan bahwa soal terjawab dengan benar, yaitu terbukti saling komutatif. Namun, jika diamati lebih intens, cara mahasiswa tersebut dalam menyelesaikan soal dapat dikatakan kurang tepat. Hal ini dikarenakan sifat komutatif matriks tidak ditentukan dari kesamaan determinannya. Hasil operasi dua matriks yang memiliki nilai determinan sama, tidak menjamin bahwa kedua matriks tersebut komutatif.

Bahkan, jika seandainya langkah tersebut dikatakan sebagai langkah yang benar dalam membuktikan sifat komutatif, maka pengandaian tersebut akan membuat kalimat logika matematika pada soal menjadi keliru. Melalui hasil pengerjaan soal pada Gambar 3, mahasiswa mendapatkan bahwa  $\det(AB) = adcf - 0(ae + bf)$  sedangkan  $\det(BA) = adcf - 0(bd + ec)$ . Jika ingin melihat kesamaan determinan antara  $AB$  dan  $BA$ , maka tidak perlu dibuktikan bahwa  $ae + bf = bd + ec$  karena perkalian dengan nol, pasti akan menghasilkan nol. Konsep ini menjadikan  $\det(AB)$  sama dengan

$\det(BA)$  tanpa perlu melihat kesamaan  $ae + bf$  dengan  $bd + ec$ . Jika ini dianggap sebagai suatu cara penyelesaian yang tepat, maka esensi kalimat logika matematika “jika dan hanya jika” pada soal menjadi tidak terpakai. Adapun kesalahan prosedural tipe ini dilakukan oleh 4 dari 6 mahasiswa (66.67%).

Argumen dari studi yang dilakukan oleh Wawan dan Djam'an (2017) mengemukakan bahwa pemahaman prosedural juga berarti kemampuan peserta didik dalam menyusun suatu algoritma atau langkah sistematis terhadap penyelesaian masalah. Jenis lain pada kesalahan prosedural dilakukan oleh 2 dari 6 mahasiswa (33.33%) yang ditunjukkan oleh Gambar 4 berikut.

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

$$AB = BA$$

$$\begin{vmatrix} a & b & | & d & e \\ 0 & c & | & 0 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & | & a & b \\ 0 & f & | & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ad+0 & ae+bf \\ 0+0 & 0+cf \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} da+0 & bd+ce \\ 0 & 0+cf \end{vmatrix}$$

saling komutatif.

Gambar 4. Kesalahan Prosedural Mahasiswa  
(Kesalahan Penyusunan Algoritma  
Penyelesaian)

Berdasarkan Gambar 4, terlihat bahwa mahasiswa juga memahami secara konsep bahwa komutatif yang hendak dibuktikan adalah komutatif pada perkalian dua matriks  $A$  dan  $B$ . Namun, kegagalan akan pemahaman prosedural ditunjukkan dengan

kesalahan penyusunan algoritma penyelesaian. Tampak pada Gambar 4 bahwa mahasiswa menggunakan simbol determinan dalam mengoperasikan perkalian kedua matriks, yang diakhiri dengan kesimpulan cepat bahwa kedua matriks saling komutatif, padahal proses penyelesaian masih berlanjut.

Melalui kedua tipe dari kesalahan prosedural tersebut, dapat dilihat bahwa ketidakseimbangan antara pemahaman konseptual dan prosedural mengakibatkan mahasiswa tetap tidak mampu menyelesaikan soal dengan tepat dan benar. Hal tersebut sejalan dengan argumen dari Khair et al. (2018) bahwa kesalahan peserta didik dalam menyelesaikan permasalahan matematis cenderung dikarenakan kurangnya pemahaman konsep dan prosedur. Oleh karena itu, perlu optimasi terkait kedua pemahaman ini guna meminimalisir kesalahan dalam penyelesaian masalah.

### Kesalahan Teknik

Jenis kesalahan terakhir pada tahapan Kastolan adalah kesalahan teknik. Berdasarkan Tabel 1, diketahui bahwa hanya 1 mahasiswa (3.33%) yang mengalami kesalahan teknik. Kesalahan teknik berfokus pada kesalahan dalam perhitungan operasi matematika yang dilakukan, ataupun penulisan simbol matematika (Farida, 2015). Hasil pengerjaan mahasiswa yang dikategorikan sebagai kesalahan teknik diperlihatkan pada Gambar 5 berikut.

Handwritten work showing matrix multiplication and simplification. The student defines matrices  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  and  $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$ , notes they are "saling komutatif", and calculates  $AB = \begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$  and  $BA = \begin{pmatrix} ad & bd+ec \\ 0 & cf \end{pmatrix}$ . The difference is calculated as  $AB - BA = \begin{pmatrix} bd - bf - ae + ec \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . The final result is  $0$ . A red box highlights the term  $bc$  in the intermediate step  $-ae - bf + bd + bc$ .

Gambar 5. Kesalahan Teknik Mahasiswa  
(Kesalahan Penulisan Variabel)

Gambar 5 dengan jelas memperlihatkan sedikit ketidakteelitian yang dilakukan oleh mahasiswa. Keseluruhan proses, konsep, dan prosedur perhitungan telah dilakukan dengan sangat baik, namun terdapat kesalahan pada penulisan suku terakhir dalam proses penyelesaian soal, seperti yang diberi tanda berupa kotak merah. Pada penelitian ini, kesalahan teknik tidak banyak dijumpai sebagai kesalahan umum mahasiswa. Namun, bukan berarti jenis kesalahan ini tidak perlu diwaspadai di dalam pembelajaran matematika. Kesalahan teknis yang sering terjadi menandakan peserta didik mengalami masalah dalam metakognisinya, yaitu ditandai dengan kurangnya kemauan untuk meninjau ulang hasil yang telah diperoleh dalam pemecahan masalah (Dirgantoro et al., 2019). Oleh karena itu, perlu bagi mahasiswa untuk terus ditingkatkan kemampuan metakognisinya agar semakin terbiasa untuk tidak tergesa-gesa dalam menyelesaikan soal, sehingga dapat meminimalisir terjadinya kesalahan teknik.

## 4. KESIMPULAN

Melalui analisis kesalahan menggunakan tahapan Kastolan terhadap topik matriks pada mata kuliah

Aljabar Linear, diketahui bahwa sebagian besar mahasiswa mengalami jenis kesalahan konseptual. Namun, bukan berarti bahwa kesalahan prosedural dan kesalahan teknik dianggap sebagai bentuk kesalahan yang tidak esensial. Bagaimanapun juga, ketiga jenis kesalahan matematis ini memiliki urgensi untuk diminimalisir guna tercapainya prestasi matematis yang optimal bagi mahasiswa. Penelitian ini terbatas hanya pada topik matriks Aljabar Linear. Kesempatan untuk menerapkan tahapan Kastolan terbuka lebar bagi peneliti yang akan menggunakannya terkait topik-topik lain pada pembelajaran matematika. Potensi untuk menerapkan maupun mengembangkan model pembelajaran juga terbuka guna mengatasi kesalahan matematis mahasiswa sebagai bentuk tindak lanjut atas temuan yang dihasilkan.

## 5. DAFTAR PUSTAKA

- Afifah, D. S. N., Sarjono, B., Marsalina, L., Listiawan, T., & Putri, I. M. (2020). Kesalahan Siswa SMK dalam Menyelesaikan Soal Program Linier Ditinjau dari Pemahaman Konseptual dan Prosedural. *Jurnal Tadris Matematika*, 3(1), 55–66.
- Afrila, D., & Yarmayani, A. (2018). Pengembangan Media Pembelajaran Modul Interaktif Dengan Software Adobe Flash pada Mata Kuliah Matematika Ekonomi di Universitas Batanghari Jambi. *Jurnal Ilmiah Universitas Batanghari Jambi*, 18(3), 539–551.
- Ayuningsih, R., Setyowati, R. D., & Utami, R. E. (2020). Analisis Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Program Linear Berdasarkan Teori Kesalahan Kastolan. *Imajiner: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 2(6), 510–518.
- Dirgantoro, K. P. S., Saragih, M. J., & Listiani, T. (2019). Analisis kesalahan mahasiswa PGSD dalam menyelesaikan soal statistika penelitian pendidikan ditinjau dari prosedur Newman [An analysis of primary teacher education students solving problems in statistics for educational research using the Newman procedure]. *JOHME: Journal of Holistic Mathematics Education*, 2(2), 83–96.
- Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology*, 7, 1–16.
- Farida, N. (2015). Analisis kesalahan siswa SMP kelas VIII dalam menyelesaikan masalah soal cerita matematika. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika Journal of Mathematics Education*, 4(2), 42–52.
- Hamdani. (2016). Meningkatkan Pengetahuan Konseptual Dan Pengetahuan Prosedural Mahasiswa Melalui Pendekatan Diskursus Matematik. *Jurnal Pendidikan Matematika Dan IPA*, 6(1), 13–25.
- Howard, A., & Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Algebra*. USA: Wiley.
- Karim, & Normaya. (2015). Kemampuan Berpikir Kritis Siswa dalam Pembelajaran dalam Pembelajaran Matematika dengan Menggunakan Model Jucama di Sekolah Menengah Pertama. *EDU-MAT: Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(1), 92–104.
- Khair, M. S., Subanji, & Muksar, M. (2018). Kesalahan Konsep dan Prosedur Siswa dalam Menyelesaikan Soal Persamaan Ditinjau dari Gaya Berpikir. *Jurnal Pendidikan: Teori Penelitian Dan Pengembangan*, 3(5), 620–633.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B.

- (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Luttenberger, S., Wimmer, S., & Paechter, M. (2018). Spotlight on math anxiety. *Psychology Research and Behavior Management, 11*, 311–322.
- Murtiyasa, B., & Wulandari, V. (2020). Analisis kesalahan siswa materi bilangan pecahan berdasarkan teori Newman. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika, 9*(3), 713–726.
- Nawafilah, N. Q. (2019). Analisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal sistem persamaan linear menggunakan operasi baris elementer. *Reforma: Jurnal Pendidikan Dan Pembelajaran, 8*(1), 167–172.
- Patricia, F. A. (2019). Analisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan persamaan kuadrat pada mata kuliah Aljabar Elementer. *PRISMATIKA: Jurnal Pendidikan Dan Riset Matematika, 1*(2), 8–15.
- Prahmana, R. C. I., Sutanti, T., Wibawa, A. P., & Diponegoro, A. M. (2019). Mathematical Anxiety Among Engineering Students. *Infinity Journal, 8*(2), 179.
- Raharti, A. D., & Yuniarta, T. N. H. (2020). Journal of honai math. *JHM: Journal of Honai Math, 3*(1), 77–100.
- Ramalisa, Y., & Syafmen, W. (2014). Analisis Pengetahuan Prosedural Siswa Tipe Kepribadian Sensing Dalam Menyelesaikan Soal Materi Sistem Persamaan Linear Dua Ariabel. *EDUMATIKA/ Jurnal Pendidikan Matematika, 4*(1), 30–36.
- Rawa, N. R., & Yasa, P. A. E. M. (2019). Kecemasan Matematika Pada Mahasiswa Pendidikan Guru Sekolah Dasar. *Journal of Education Technology, 2*(2), 36.
- Sa'o, S., Naja, F. Y., & Irfan, A. (2019). Penerapan pembelajaran dengan menggunakan alat peraga pada pembelajaran matematika SMP. *Al Khawarizmi: Jurnal Pendidikan Dan Pembelajaran Matematika, 3*(1), 65–73.
- Sari, N., Indiati, I., & Endahwuri, D. (2020). Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Matematika Siswa ditinjau dari Pemahaman Konseptual dan Pengetahuan Prosedural. *Imajiner: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika, 2*(6), 467–472.
- Soesanto, R. H., & Dirgantoro, K. P. S. (2021). Kemampuan Pemecahan Masalah Mahasiswa pada Kalkulus Integral Dilihat dari Keyakinan dan Pengetahuan Awal Matematis. *Jurnal Elemen, 7*(1), 117–129.
- Sudiono, E. (2017). Analisis kesalahan dalam menyelesaikan soal matematika materi persamaan garis lurus berdasarkan analisis Newman. *UNION: Jurnal Pendidikan Matematik, 5*(3), 295–302.
- Sugiyono. (2013). *Metode Penelitian Pendidikan: Pendekatan Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D*. Bandung: Alfabeta.
- Sutresna, N. (2015). Belajar Gerak Dan Matematika Dasar Melalui Pendekatan Pembelajaran Terpadu Di Sekolah Dasar. *Jurnal Cakrawala Pendidikan, 2*(2), 268–277.
- Thamsir, T., Silalahi, D. W., & Soesanto, R. H. (2019). Upaya meningkatkan kemampuan pemecahan masalah soal non-rutin pada materi persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel dengan penerapan metode peer tutoring. *JOHME: Journal of Holistic Mathematics Education, 3*(1), 96–107.
- Tias, A. A. W., & Wutsqa, D. U. (2015). Analisis kesulitan siswa SMA dalam pemecahan masalah matematika kelas XII IPA di kota Yogyakarta.

- Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, 2(1), 28–39.
- Wawan, T. A., & Djam'an, N. (2017). Analisis Pemahaman Konseptual dan Prosedural Siswa dalam Menyelesaikan Soal Matematika Berdasarkan Gaya Belajar. *Issues in Mathematics Education (IMED)*, 1(2), 101–106.
- Yanti, Y. A., Buchori, A., & Nugroho, A. A. (2019). Pengembangan Video Pembelajaran Matematika melalui Model Pembelajaran Flipped Classroom di Sekolah Menengah Kejuruan. *Imajiner: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 1(6), 381–392.
- Yuniarti, Y. (2016). Pengembangan Kemampuan Komunikasi Matematis dalam Pembelajaran Matematika di Sekolah Dasar. *EduHumaniora / Jurnal Pendidikan Dasar Kampus Cibiru*, 6(2), 109–114.
- Zimmerman, B. J. (2015). Self-regulated learning: Theories, measures, and outcomes. *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*, 541–546.